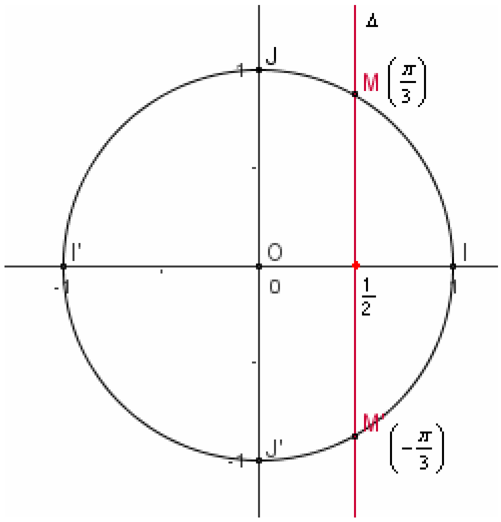
الحساب المثلثي – الجزء 2-

القدرات المنتظرة	الدرس الأول	الدورة الثانية
التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية	عدد الساعات: 15	

I- المعادلات المثلثية

1- المعادلة $\cos x = a$



مثال1 حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

لدينا المستقيم $\Delta :\ x = \frac{1}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية

في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين

على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$.

بما أن $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M

و $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M'

فإننا نستنتج أن $\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

مثال 2 حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in [-2\pi; 2\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi; 2\pi]$

فان $-2\pi \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2\pi$ أو $-2\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2\pi$

لدينا $-2\pi \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2\pi$ تكافئ $-\frac{7}{6} \le k \le \frac{5}{6}$ تكافئ $k = -1$ أو $k = 0$

ومنه $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = -\frac{5\pi}{3}$

لدينا $-2\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2\pi$ تكافئ $-\frac{5}{6} \le k \le \frac{7}{6}$ تكافئ $k = 1$ أو $k = 0$

ومنه $x = -\frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{5\pi}{3}$

إذن $S = \left\{\frac{-5\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

خلاصة * المعادلة $\cos x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \ \vee\ a \prec -1$

* $\cos x = 1$ $\ x \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x = 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z} /$

* $\cos x = -1$ $\ x \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x = \pi + 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z} /$

* إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر α من $]0;\pi[$ حيث $\cos \alpha = a$

و بالتالي حلول المعادلة $\cos x = a$ في $\mathbb{R}$ هي $x = \alpha + 2k\pi$ أو $x = -\alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

تمرين حل المعادلات

$x \in \mathbb{R} \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x) \qquad\qquad x \in]-\pi;3\pi] \quad \cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x \in [\pi;2\pi[\qquad 2\cos^2 x+3\cos x+1=0$

الحل

* نحل $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x) \qquad x \in \mathbb{R}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x)$ تكافئ $2x=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $2x=-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $3x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

* نحل $\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad x \in]-\pi;3\pi]$

نعلم أن $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

و بالتالي $\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $2x-\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x-\frac{3\pi}{4}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $2x=\frac{19\pi}{12}+2k\pi$ أو $2x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{19\pi}{24}+k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

و حيث $x \in]-\pi;3\pi]$ فان

من أجل $x=\frac{19\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi \prec \frac{19\pi}{24}+k\pi \leq 3\pi$ أي $-1 \prec \frac{19}{24}+k \leq 3$

ومنه $-\frac{43}{24} \prec k \leq \frac{53}{24}$

و حيث $k \in \mathbb{Z}$ فان $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$ أو $K=2$

إذن $x=\frac{19\pi}{24}-\pi=-\frac{5\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}+\pi=\frac{43\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}+2\pi=\frac{67\pi}{24}$

من أجل $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi \prec -\frac{\pi}{24}+k\pi \leq 3\pi$ أي $-1 \prec -\frac{1}{24}+k \leq 3$

ومنه $-\frac{23}{24} \prec k \leq \frac{73}{24}$

و حيث $k \in \mathbb{Z}$ فان $k=0$ أو $k=1$ أو $K=2$ أو $k=3$

إذن $x=-\frac{\pi}{24}+0\cdot\pi=-\frac{\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+\pi=\frac{23\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+2\pi=\frac{47\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+3\pi=\frac{71\pi}{24}$

إذن $S=\left\{-\frac{5\pi}{24};-\frac{\pi}{24};\frac{19\pi}{24};\frac{23\pi}{24};\frac{43\pi}{24};\frac{47\pi}{24};\frac{67\pi}{24};\frac{71\pi}{24}\right\}$

* نحل $2\cos^2 x+3\cos x+1=0 \qquad x \in [\pi;2\pi[$

نضع $\cos x = X$ المعادلة تصبح $2X^2+3X+1=0$

ليكن Δ مميز المعادلة

$\Delta = 3^2 - 4\times 2\times 1 = 1$

ومنه $X = \dfrac{-3+1}{4} = -\dfrac{1}{2}$ أو $X = \dfrac{-3-1}{4} = -1$

و بالتالي $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ أو $\cos x = -1$

لدينا $\cos x = -1$ تكافئ $x = \pi + 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}/$

و حيث $x\in[\pi;2\pi[$ فان $\pi \le \pi + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $0\le k \prec \dfrac{1}{2}$ ومنه $k=0$ اذن $x=\pi$

لدينا $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ أي $\cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

ومنه $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

و حيث $x\in[\pi;2\pi[$ فان

من أجل $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ لدينا $\pi \le -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $\dfrac{5}{6}\le k \prec \dfrac{4}{3}$ ومنه $k=1$

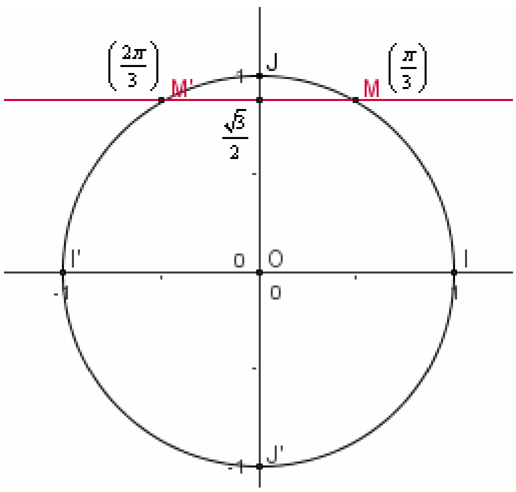
إذن $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{4\pi}{3}$

من أجل $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ لدينا $\pi \le \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $\dfrac{1}{6}\le k \prec \dfrac{2}{3}$ لا يوجد عدد صحيح نسبي يحقق المتفاوتة الأخيرة

إذن $S = \left\{\pi;\dfrac{4\pi}{3}\right\}$

2- المعادلة $\sin x = a$

مثال1 حل $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad x\in\mathbb{R}$



لدينا المستقيم $\Delta:\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\dfrac{\pi}{3}$ و $\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$.

بما أن $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M و $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M' فإننا نستنتج أن

$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

مثال 2 حل $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad x\in[-2\pi;3\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi;3\pi]$

فان $-2\pi \le \frac{\pi}{3}+2k\pi \le 3\pi$ أو $-2\pi \le \frac{2\pi}{3}+2k\pi \le 3\pi$

لدينا $-2\pi \le \frac{\pi}{3}+2k\pi \le 3\pi$ تكافئ $-\frac{7}{6} \le k \le \frac{8}{6}$

تكافئ $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

ومنه $x=\frac{7\pi}{3}$ أو $x=\frac{\pi}{3}$ أو $x=-\frac{5\pi}{3}$

لدينا $-2\pi \le \frac{2\pi}{3}+2k\pi \le 3\pi$ تكافئ $-\frac{8}{6} \le k \le \frac{7}{6}$

تكافئ $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

ومنه $x=\frac{8\pi}{3}$ أو $x=\frac{2\pi}{3}$ أو $x=-\frac{4\pi}{3}$

إذن $S=\left\{\frac{-5\pi}{3};\frac{-4\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right\}$

خلاصة المعادلة $\sin x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \quad \vee \quad a \prec -1$

$\sin x = 1 \quad x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}/$

$\sin x = -1 \quad x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}/$

إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر α من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\sin\alpha = a$

حلول المعادلة $\sin x = a$ في $\mathbb{R}$ هي $x=\alpha+2k\pi$ أو $x=\pi-\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

مجموعة حلول المعادلة $S=\{\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

تمرين حل المعادلات $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(3x) \qquad x\in\mathbb{R}$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \quad x\in]-\pi;2\pi]$

الحل

نحل $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(3x) \qquad x\in\mathbb{R}$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(3x)$ تكافئ $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

تكافئ $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ أو $2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{2}+3x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $5x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $-x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{6}+2(-k)\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن $S=\left\{\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2(-k)\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

نحل $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \quad x\in]-\pi;2\pi]$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ تكافئ $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

تكافئ $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x-\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $2x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ أو $2x=\frac{17\pi}{12}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{24}+k\pi$ أو $x=\frac{17\pi}{24}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

و حيث أن $x\in\left]-\pi;2\pi\right]$ فان

من أجل $x=\frac{\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi\prec\frac{\pi}{24}+k\pi\le 2\pi$ أي $-\frac{25}{24}\prec k\le\frac{47}{24}$ و منه $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

إذن $x=\frac{\pi}{24}-\pi=-\frac{23\pi}{24}$ أو $x=\frac{\pi}{24}$ أو $x=\frac{\pi}{24}+\pi=\frac{25\pi}{24}$

من أجل لدينا $-\pi\prec\frac{17\pi}{24}+k\pi\le 2\pi$ ومنه $-\frac{41}{24}\prec k\le\frac{31}{24}$ و منه $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

إذن $x=\frac{17\pi}{24}-\pi=-\frac{7\pi}{24}$ أو $x=\frac{17\pi}{24}$ أو $x=\frac{17\pi}{24}+\pi=\frac{41\pi}{24}$

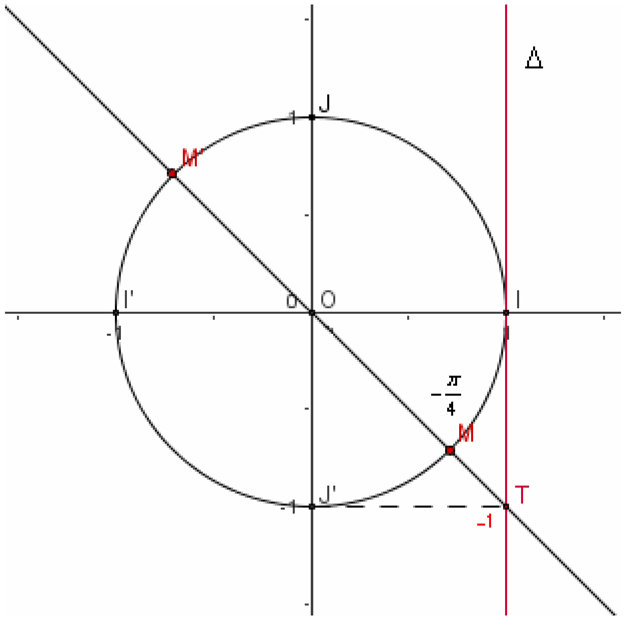
ومنه $S=\left\{-\frac{23\pi}{24};-\frac{7\pi}{24};\frac{\pi}{24};\frac{17\pi}{24};\frac{25\pi}{24};\frac{41\pi}{24}\right\}$

3- المعادلة $\tan x=a$

حل المعادلة $\tan x=-1$ $x\in\mathbb{R}$

نعتبر Δ المماس الدائرة المثلثية (C) في أصلها I ،

نأخذ النقطة T من Δ حيث -1 أفصول T في المحور Δ



المستقيم (OT) يقطع الدائرة المثلثية (C)

في النقطتين M و M' نعلم أن $\tan(-\frac{\pi}{4})=-1$

و بالتالي $-\frac{\pi}{4}$ أفصول منحني للنقطة M

وبما أن $\tan(x+k\pi)=\tan x$ لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

فان حلول المعادلة هي $x=\frac{-\pi}{4}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$

اذن $S=\left\{\frac{-\pi}{4}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

خاصية

$\tan x=a\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi\quad /k\in\mathbb{Z}$ حيث α حل للمعادلة $\tan x=a$ في $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

تمرين حل المعادلتين

$\tan 2x=\sqrt{3}\qquad x\in[0;3\pi]$

$\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan x\qquad x\in\mathbb{R}$

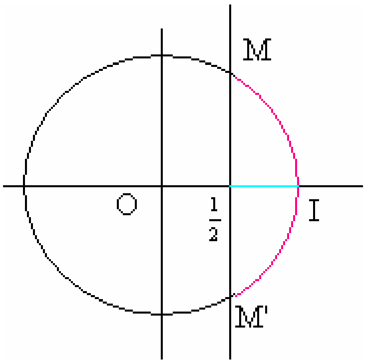
II- المتراجحات المثلثة

مثال1

حل $\cos x\ge\frac{1}{2}\qquad x\in\left]-\pi;\pi\right]$

نحل أولا المعادلة $\cos x=\frac{1}{2}\qquad x\in\left]-\pi;\pi\right]$

بإتباع خطوات حل المعادلات نحصل على



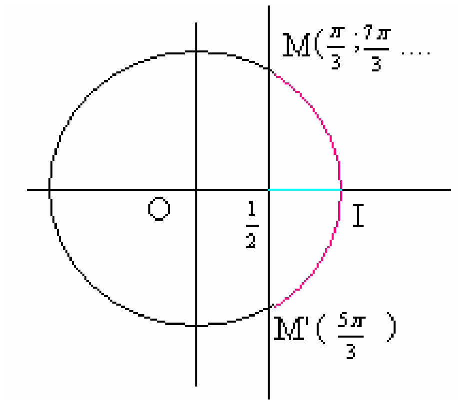
$\cos x = \frac{1}{2}$ ، $x \in]-\pi;\pi]$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = -\frac{\pi}{3}$

لتكن $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ نقطتين من الدائرة المثلثية

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل

المنحنية للنقط (C) التي تنتمي إلى القوس $\left[\widehat{M'IM}\right]$ في $]-\pi;\pi]$

وهذه المجموعة هي $S = \left[\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$



مثال 2 حل $\cos x \geq \frac{1}{2}$ ، $x \in [0;3\pi[$

نحل أولا المعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$ ، $x \in [0;3\pi[$

$\cos x = \frac{1}{2}$ ، $x \in [0;3\pi[$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{7\pi}{3}$ أو $x = \frac{5\pi}{3}$

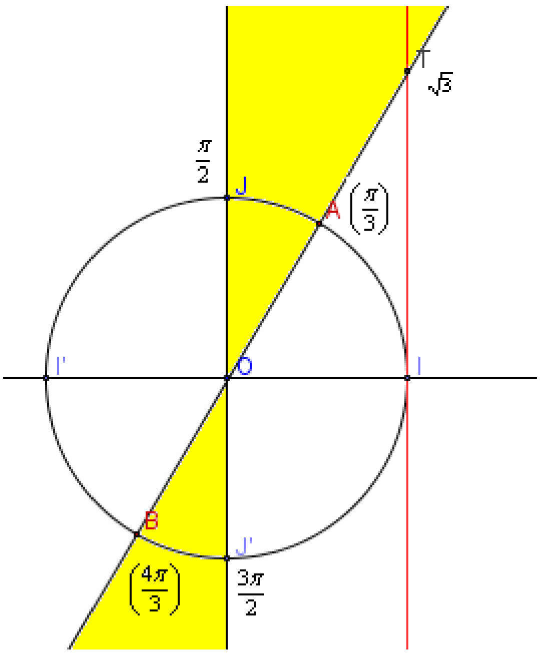
$\frac{\pi}{3}$ و $\frac{7\pi}{3}$ أفصولين منحنيين لنفس النقطة M ،

نعتبر $\frac{5\pi}{3}$ أفصول منحنى للنقطة M'

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل المنحنية للنقط (C)

التي تنتمي الى القوس $\left[\widehat{M'IM}\right]$ في $[0;3\pi[$

وهذه المجموعة هي $S = \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right]$



مثال3

حل $\tan x \geq \sqrt{3}$ ، $x \in [0;2\pi]$

نحل المعادلة $\tan x = \sqrt{3}$ ، $x \in [0;2\pi]$

$\tan x = \sqrt{3}$ ، $x \in [0;2\pi]$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{4\pi}{3}$

نعتبر $\frac{\pi}{3}$ أفصول منحنى للنقطة A

و $\frac{4\pi}{3}$ أفصول منحنى للنقطة B

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل المنحنية

للنقط (C) التي تنتمي إلى اتحاد القوسين $\left[\widehat{AJ}\right[$ و $\left[\widehat{BJ'}\right[$

في $[0;2\pi]$

وهذه المجموعة هي $S = \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right[$

تمرين

حل $\sin x \succ \frac{-1}{2}$ ، $x \in]-\pi;\pi]$

$\sin x \succ \frac{-1}{2}$ ، $x \in]0;4\pi]$

$\tan x \prec 1$ ، $x \in [0;2\pi]$

متراجحات تؤول في حلها إلى متراجحات أساسية
تمرين
حل

$$x \in [-\pi;\pi] \quad \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \le \frac{1}{2}$$

$$x \in [0;\pi] \quad \tan 3x \succ \sqrt{3}$$

$$x \in]-\pi;\pi] \quad 4\cos^2 x - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2} \le 0$$

$$x \in]-\pi;\pi] \quad \frac{1+\tan x}{\sin 2x} \ge 0$$

III- الزوايا المحيطية – الرباعيات الدائرية
1- تعريف

- **الزاوية المركزية** : هي زاوية رأسها مركز الدائرة
- **الزاوية المحيطية** : هي زاوية ينتمي رأسها للدائرة وتحصر بين ضلعيها قوسا من هذه الدائرة

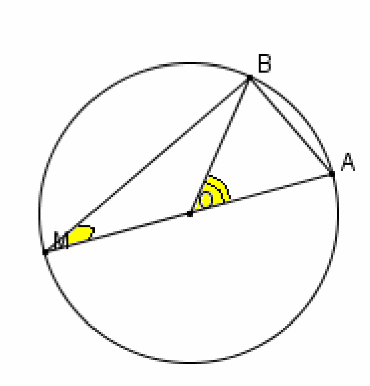
2-خاصيات
نشاط1

لتكن (C) دائرة مركزها O نعتبر A و B نقطتين مختلفتين من (C) غير متقابلتين قطريا
و M نقطة من (C) بحيث $\widehat{AOB}$ و $\widehat{AMB}$ تحصران نفس القوس $\left[\widehat{AB}\right]$

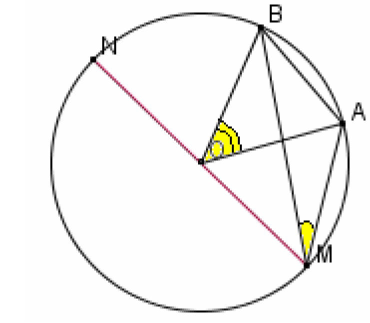
1- بين أن $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ في الحالات التالية
أ/ M و O و A مستقيمية
ب/ M و O و A غير مستقيمية
يمكن اعتبار نقطة N من (C) حيث N و O و M مستقيمية
و باستعمال أ/ مرتين بين المطلوب

2- نعتبر (AT) المماس للدائرة (C). الزاوية $\widehat{BAT}$ محيطية تحصر نفس القوس التي تحصره الالزاوية المركزية $\widehat{AOB}$
بين أن $\widehat{AOB} = 2\widehat{TAB}$

الحل---------------------------

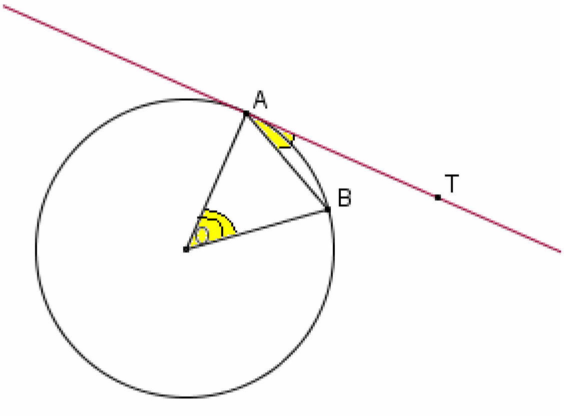


1- أ/ M و O و A مستقيمية
المثلث OBM متساوي الساقين في الرأس O
ومنه $\widehat{BOM} = \pi - 2\widehat{BMO}$
و حيث $\widehat{BOM} = \pi - \widehat{AOB}$ لأن M و O و A مستقيمية
فان $\widehat{AOB} = 2\widehat{BMO}$
اذن $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$



ب/ M و O و A غير مستقيمية
N من (C) حيث N و O و M مستقيمية
حسب أ/ لدينا $\widehat{NOB} = 2\widehat{NMB}$
لدينا OAM مثلث متساوي الساقين في الرأس O
و منه $\widehat{AOM} = \pi - 2\widehat{AMO}$
لدينا $\widehat{AOB} = \pi - \left(\widehat{NOB} + \widehat{AOM}\right)$
ومنه $\widehat{AOB} = \pi - \left(2\widehat{NMB} + \pi - 2\widehat{AMO}\right)$

$$\widehat{AOB} = 2\left(\widehat{AMO} - \widehat{NMB}\right)$$



إذن $\widehat{AOB}=2\widehat{AMB}$

2/ بين أن $\widehat{AOB}=2\widehat{TAB}$

(AT) المماس للدائرة (C) ومنه $\widehat{OAB}=\frac{\pi}{2}-\widehat{BAT}$

لدينا OAB متساوي الساقين في الرأس O

ومنه $\widehat{OAB}=\pi-2\widehat{OAB}$

و بالتالي $\widehat{OAB}=\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\widehat{BAT}\right)$

إذن $\widehat{AOB}=2\widehat{TAB}$

خاصية1

قياس زاوية مركزية في دائرة هو ضعف قياس زاوية محيطية تحصر نفس القوس التي تحصره هذه الزاوية المركزية

نشاط2

لتكن A و B و C و D نقط مختلفة من دائرة (C) مركزها O

بين أن $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=\pi$ أو $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$

خاصية2

A و B و C ثلاث نقط من دائرة (C) و D نقط مختلفة من المستوى

تكون D من الدائرة (C) إذا و فقط إذا كان $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=\pi$ أو $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$

3- علاقات الجيب في مثلث

نشاط 3

ليكن ABC مثلثا و R شعاع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

بين أن $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=\frac{AB}{\sin\widehat{C}}=2R$ في الحالات التالية

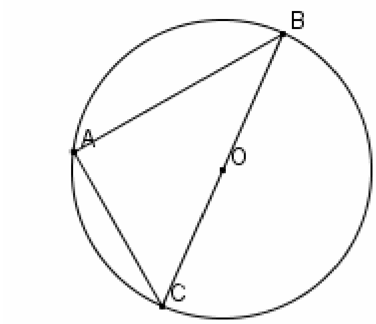
أ/ ABC قائم الزاوية في A

ب/ جميع زوايا المثلث ABC حادة

ج/ إحدى زوايا المثلث ABC منفرجة

الجواب

أ/ ABC قائم الزاوية في A



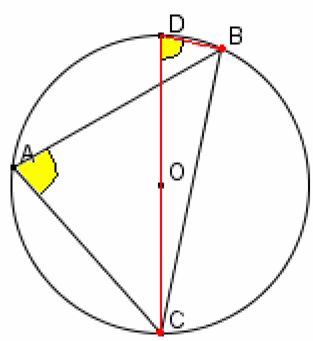
$\sin\widehat{A}=\sin\frac{\pi}{2}=1$ ومنه $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=BC=2R$

$\sin\widehat{B}=\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{2R}$ ومنه $\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=2R$

$\sin\widehat{C}=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{2R}$ ومنه $\frac{AB}{\sin\widehat{C}}=2R$

إذن $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=\frac{AB}{\sin\widehat{C}}=2R$

ب/ جميع زوايا المثلث ABC حادة



نعتبر D نقطة مقابلة قطريا مع C

DBC قائم الزاوية في B

لدينا $\widehat{A}\equiv\widehat{D}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$\sin\widehat{D}=\frac{BC}{DC}=\frac{BC}{2R}$ ومنه $\frac{BC}{\sin\widehat{D}}=2R$ إذن $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=2R$

لدينا DAC قائم الزاوية في A

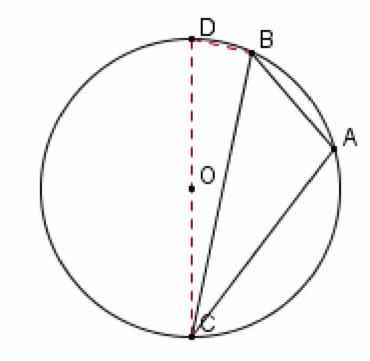
و $\widehat{CDA} \equiv \widehat{B}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$\sin \widehat{CDA} = \frac{AC}{DC} = \frac{AC}{2R}$ ومنه $\sin \widehat{B} = \frac{AC}{2R}$ إذن $\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R$

بالمثل نعتبر نقطة مقابلة قطريا مع A و نبين $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

إذن $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

ج/ إحدى زوايا المثلث ABC منفرجة



لنفترض أن $\widehat{A}$ منفرجة

نعتبر D نقطة مقابلة قطريا مع C

$\widehat{A}$ و $\widehat{D}$ متكاملتان ومنه $\sin \widehat{D} = \sin \widehat{A}$

$\sin \widehat{D} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{2R}$ ومنه $\frac{BC}{\sin \widehat{D}} = 2R$ إذن $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = 2R$

الزاويتان $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ حادتان

حسب ب/ نحصل على $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$ و $\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R$

إذن $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

خاصية

> ليكن ABC مثلثا و R شعاع الدائرة المحيطة به
>
> $$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$$

4- علاقات في المثلث (المساحة - المحيط)

نشاط

ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي لـ A على (BC) و S مساحته

1- بين أن $S = \frac{1}{2}\left(BC \times AC \times \sin \widehat{C}\right)$

2- ليكن r شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و O مركزها

أ/ أحسب مساحة AOC بدلالة r و AC

ب/ بين أن $S = \frac{1}{2} p \times r$ حيث p محيط المثلث ABC

خاصية

> ليكن ABC مثلثا و r شعاع الدائرة المحاطة به و S مساحته p محيطه
>
> $$S = \frac{1}{2}\left(BC \times AC \times \sin \widehat{C}\right)$$
>
> $$S = \frac{1}{2} p \times r$$