نهايات الدوال العددية

I. نهايات دالة عند $+\infty$ و $-\infty$:

بصفة عامة:

-إذا كانت $f(x)$ تأخذ قيما موجبة و كبيرة جدا عندما يأخذ x قيما موجبة وكبيرة فإننا نقول أن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما تؤول x إلى $+\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

بنفس الطريقة نعرف $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. هذه النهايات تسمى نهايات غير منتهية.

إذا كان لدينا $\lim_{x\to+\infty}(x) = l$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ حيث $l \in \mathbb{R}$ فإنها تسمى نهاية منتهية .

قواعد الحساب على $+\infty$ و $-\infty$:

نقبل الاصطلاحات التالية كوسائل مساعدة على حساب النهايات:

$(+\infty)^n = +\infty.$	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty.$
$(-\infty)^n = \begin{cases} -\infty & n \text{ فردي} \\ +\infty & n \text{ زوجي} \end{cases}.$	$(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$
$\frac{1}{+\infty} = 0$ و $\frac{1}{-\infty} = 0$.	$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty.$
	$(-\infty) \times (-\infty) = +\infty.$
	$(+\infty) \times (-\infty) = -\infty.$

ليكن k عددا حقيقيا:

إذا كان k موجبا:	$k + \infty = +\infty.$
$k \times (+\infty) = +\infty$.	$k - \infty = -\infty.$
$k \times (-\infty) = -\infty.$	$+\infty - k = +\infty.$
إذا كان k سالبا:	$-\infty - k = -\infty.$
$k \times (+\infty) = -\infty.$	
$k \times (-\infty) = +\infty.$	

عمليات لا يمكن حسابها مباشرة (الأشكال الغير محددة):

$0 \times (\mp\infty).$	$+\infty - \infty$ **أو** $-\infty + \infty.$
$\frac{0}{0}.$	$\frac{\mp\infty}{\mp\infty}.$

هذه العمليات تسمى أشكالا غير محدودة, بمعنى أنه لا يمكن حسابها مباشرة . ولكن يمكن حسابها بعد إجراء عمليات تبسيط كالإختزال, الضرب في المرافق, التعميل...

قاعدة الحساب:

لحساب نهاية دالة عند $\pm\infty$ يكفي أن نعوض x بالقيمة $\pm\infty$ و نحسب النتيجة باحترام القاعدة السابقة.

أمثلة:

- ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{-2x+1} = \frac{1}{-2(+\infty)+1} = \frac{1}{-\infty+1} = \frac{1}{-\infty} = 0.$
- ✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty.$
- ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \frac{(+\infty)^2}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$.

وهو شكل غير محدد. لذلك سنحاول تبسيط الدالة: لدينا $\frac{x^2}{x} = x$ إذن:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

- ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x = (+\infty)^2 - (+\infty) = +\infty - \infty$.

وهو شكل غير محدد لذلك سنحاول تبسيط الدالة: لدينا $x^2 - x = x(x-1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x(x-1) = +\infty(+\infty - 1)$.

$= +\infty \times (+\infty) = +\infty$.

تمرين تطبيقي: احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 + 5x + 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x)^3 + \frac{7}{x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)(x+1)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 + (x^2-1)(1-3x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2+7}$.

خاصية: (نهاية الدوال الحدودية و الجذرية)

لتكن P دالة حدودية درجتها n حيث:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n.$

لتكن دالة حدودية أخرى درجتها حيث:

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0.$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$

أمثلة:

$\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2 + 5x + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2 = -\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^3+5x+1}{x^2+x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty.$

تمرين تطبيقي: احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^6 + 5x^3 + x - 3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 3x.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3x^5+5}{x^3+4}$; $\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{3x^3-x+7}{2-x^3}$.

$\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{x^4-x+1}{-x^3+x-6}.$

II. نهاية دالة عند عدد :

تعريف1:

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى العدد الحقيقي a فإننا نكتب: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

تعريف 2:

-إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a من جهة اليمين فإننا نكتب: $\lim\limits_{x>a \to a} f(x) = l$ أو $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$

-إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a من جهة اليسار فإننا نكتب: $\lim\limits_{x<a \to a} f(x) = l$ أو $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$

حيث $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

خاصية:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l \end{cases}$$

اصطلاحات يجب احترامها أثناء حساب نهاية دالة عند عدد:

- ✓ $\frac{1}{0^+} = +\infty$ و $\frac{1}{0^-} = -\infty$
- ✓ $\frac{0}{0}$ شكل غير محدد.

قاعدة الحساب:

لحساب نهاية دالة عند عدد a يكفي فقط تعويض x بالقيمة a ونحسب النتيجة مع احترام الإصطلاحات السابقة.

مثال:

$\lim\limits_{x\to1^-} \frac{1}{2-2x} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}.$

لمعرفة هل النهاية تؤول إلى $\frac{1}{0^+}$ أو إلى $\frac{1}{0^-}$ يكفي تحديد إشارة مقام الدالة عندما يؤول x إلى 1 عن اليسار. لدينا $x < 1$ إذن $-2x > -2$ ومنه $2 - 2x$ عدد موجب وبالتالي:

$\lim\limits_{x\to1^-} \left(\frac{1}{2-2x}\right) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$

تمرين تطبيقي1: احسب النهاية:

$\lim\limits_{x\to2 \atop x>2} \frac{x}{2x-4}$ و $\lim\limits_{x\to3 \atop x<3} \left(x + \frac{x-1}{4x-12}\right)$ و $\lim\limits_{x\to5 \atop x<5} \left(\frac{2x+3}{x-5}\right)$