المتتالـــيـات العددية

اليمني محمد www.sbaysite.com

I ـ تعاريف واصطلاحات :

1) نشاط تمهيدي :

نقسم القطعة $[0;1]$ إلى قطعتين لهما نفس الطول . ونكرر هذه العملية على إحدى القطعتين المحصلتين .

أ ـ احسب طول القطع المحصلة في التقسيم الأول والثاني والثالث والرابع .

ب نعرف دالة عددية f من IN^* نحو IR كما يلي : بكل تقسيم نربط الطول $f(n)$ للقطعة المحصلة . تظنن $f(n)$.

2) تعريف :

ليكن I جزء من IN . كل دالة عددية من I نحو IR تسمى متتالية عددية .

3) ترميز واصطلاحات :

نعتبر $U : I \to IR$ متتالية عددية .

- نرمز لصورة n بالرمز U_n بدلا من $U(n)$.
- نرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n\in I}$ بدلا من U .
- إذا كان $I = IN$ فإنه يرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n\in IN}$ أو $(U_n)_{n\geq 0}$ أو (U_n) .
- إذا كان $I = IN^*$ فإنه يرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n\in IN^*}$ أو $(U_n)_{n\geq 1}$.
- إذا كان $I = \{n \in IN / n \geq n_0\}$ فإنه يرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n\in I}$ أو $(U_n)_{n\geq n_0}$.
- لتكن $(U_n)_{n\in I}$ متتالية عددية . U_n يسمى حد المتتالية ذا المدل n أو الحد العام للمتتالية $(U_n)_{n\in I}$.
- تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ منتهية إذا كانت I مجموعة منتهية .
- مجموعة قيم المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ هي : $\{U_n / n \in I\}$.

4) تحديد متتالية :

تحدد المتتالية إذا علمت جميع حدودها أو الوسيلة التي تمكن من حساب أي حد من حدودها . وهناك طرق لتحديد متتالية نذكر منها :

أ ـ المتتالية المحددة بالصيغة الصريحة لحدها العام :

أمثلة :

1. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = n^2 + 3$ ؛ هذه المتتالية محددة بالصيغة الصريحة لحدها العام .
   احسب : U_1 و U_2 و U_3 و U_{n+1} و U_{2n} و U_{2n+1} .
2. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
   احسب : U_1 و U_2 و U_3 و U_{2n} و U_{2n+1} .
3. a عدد حقيقي . المتتالية (V_n) المعرفة بما يلي : $V_n = a$ لكل n من IN .
   هذه المتتالية تسمى متتالية ثابتة .

ب ـ المتتاليات الترجعية :

وهي المتتاليات التي يحسب أي حد من حدودها بالرجوع إلى حدود أخرى .

أمثلة :

1. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = -3U_n + 5$. هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعية .
   احسب : U_1 و U_2 و U_3 .
2. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_3 = -1$ و $U_n = 2U_{n-1} + 3$
   احسب : U_1 و U_2 و U_3 .

3. نعتبر المتتالية (a_n) المعرفة بما يلي : $a_0=1$ و $a_1=2$ و $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ لكل $n\geq 2$.

احسب : a_2 و a_3 و a_4 .

تمرين 1:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_4=1$ و $U_n=2U_{n-1}+3$

احسب : U_0 .

III ـ المتتاليات المكبورة المتتاليات المصغورة ـ المتتاليات المحدودة ـ المتتاليات الرتيبة :

1) المتتاليات المكبورة المتتاليات المصغورة :

أنشطة تمهيدية :

1. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_n=3n+5$ لكل n من IN .

بين أن : $U_n\geq 5$ لكل n من IN .

2. نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in IN}$ المعرفة ب : $V_n=2-3n$ لكل n من IN .

بين أن : $V_n\leq 2$ لكل n من IN .

تعريف :

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ مكبورة إذا كان يوجد عدد حقيقي M بحيث : $U_n\leq M$ لكل n من I .

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ مصغورة إذا كان يوجد عدد حقيقي m بحيث : $U_n\geq m$ لكل n من I .

ملاحظة :

يمكن تعويض المتفاوتتين $U_n\leq M$ و $U_n\geq m$ بالمتفاوتتين : $U_n\prec M$ و $U_n\succ m$.

تمرين 2 :

1. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_0=-1$ و $U_{n+1}=\frac{4}{4-U_n}$ لكل n من IN .

ـ بين أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ مكبورة بالعدد 2 . (بين أن $U_n\prec 2$ لكل n من IN).

2. نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in IN}$ المعرفة ب : $V_0=-3$ و $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n-2$ لكل n من IN .

ـ بين أن المتتالية $(V_n)_{n\in IN}$ مصغورة بالعدد 4 - . (بين أن $V_n\geq -4$ لكل n من IN) .

2) المتتاليات المحدودة :

تعريف :

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا كانت مكبورة ومصغورة . أي يوجد عددين حقيقيين M و m بحيث : $m\leq U_n\leq M$ لكل n من I . (أو : $m\prec U_n\prec M$ لكل n من I).

مثال :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n=\frac{1}{n}$ لكل $n\geq 1$.

لدينا : $0\leq U_n\leq 1$ لكل $n\geq 1$.

إذن : $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية محدودة .

خاصية :

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي $\alpha\succ 0$ بحيث : $|U_n|\leq\alpha$ لكل n من I .

(أو : $|U_n|\prec\alpha$ لكل n من I) .

تمرين 3 :

1. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_1=1$ و $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+1$ لكل $n\geq 1$.

بين أن : $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية محدودة .

2. نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in IN}$ المعرفة ب : $V_n=\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ لكل n من IN .

بين أن : $(V_n)_{n\geq 0}$ محدودة .

3) المتتاليات الرتيبة :

أنشطة تمهيدية :

1 ــ نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n=\frac{2n+1}{n+3}$ لكل n من IN .

ادرس إشارة الفرق : $U_{n+1}-U_n$.

لدينا : $U_{n+1}-U_n=\frac{2(n+1)+1}{(n+1)+3}-\frac{2n+1}{n+3}=\frac{2n+3}{n+4}-\frac{2n+1}{n+3}=\frac{2n^2+9n+9-2n^2-9n-4}{(n+4)(n+3)}=\frac{5}{(n+4)(n+3)}$

بما أن : $\frac{5}{(n+4)(n+3)}\succ 0$ لكل n من IN .

إذن : لكل n من IN $U_{n+1}-U_n\succ 0$

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا .

2 ــ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $v_n=\frac{3n+5}{n+1}$ لكل n من IN .

ادرس إشارة الفرق : $v_{n+1}-v_n$

لدينا : $v_{n+1}-v_n=\frac{-2}{(n+1)(n+2)}\prec 0$ لكل n من IN .

نقول إن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ تناقصية قطعا .

تعريف :

لتكن $(U_n)_{n\in I}$ متتالية عددية .

1) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تزايدية إذا كان : $\forall(n;m)\in I^2;\ \ n\prec m\Rightarrow\ \ U_n\leq U_m$.

2) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تزايدية قطعا إذا كان : $\forall(n;m)\in I^2;\ \ n\prec m\Rightarrow\ \ U_n\prec U_m$.

3) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تناقصية إذا كان : $\forall(n;m)\in I^2;\ \ n\prec m\Rightarrow\ \ U_n\geq U_m$.

4) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تناقصية قطعا إذا كان : $\forall(n;m)\in I^2;\ \ n\prec m\Rightarrow\ \ U_n\succ U_m$.

5) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ ثابتة إذا كان : $\forall(n;m)\in I^2;\ \ U_n=U_m$.

خاصية :

لتكن $(U_n)_{n\in I}$ متتالية عددية .

1) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تزايدية إذا كان : $\forall n\in I:\ U_n\leq U_{n+1}$.

2) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تزايدية قطعا إذا كان : $\forall n\in I:\ U_n\prec U_{n+1}$.

3) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تناقصية إذا كان : $\forall n\in I:\ U_n\succ U_{n+1}$.

4) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تناقصية قطعا إذا كان : $\forall n\in I:\ U_n\succ U_{n+1}$.

ملاحظات :

- لدراسة رتابة متتالية $(U_n)_{n\in I}$ نتبع إحدى الطرق التالية :

1. نقارن U_n و U_{n+1}

2. ندرس إشارة الفرق $U_{n+1}-U_n$.

3. إذا كانت $U_n \succ 0$ نقارن $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1

4. إذا كانت $U_n = f(n)$ فإننا نستعمل رتابة الدالة f .

- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تزايدية فإن : $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq .....$.
- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تناقصية فإن : $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq .....$.

تمرين 4 :

I ـ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+2} \end{cases}$

1) احسب : u_1 و u_2 .

2) بين أن $u_n \prec \sqrt{3}$ لكل n من IN .

3) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية ، واستنتج أن $u_n \geq 1$ لكل n من IN .

II ـ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} v_0 = \dfrac{5}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{4}{v_n}\right) \end{cases}$

1) احسب : v_1 و v_2 .

2) بين أن $v_n \succ 2$ لكل n من IN .

3) بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ تناقصية ، واستنتج أن $v_n \leq \frac{5}{2}$ لكل n من IN .

II ـ المتتاليات الحسابية المتتاليات الهندسية :

1) المتتاليات الحسابية :

نشاط تمهيدي :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = 2n+1$ لكل n من IN .

احسب الفرق : $U_{n+1}-U_n$ لكل n من IN .

لدينا : $U_{n+1}-U_n = 2(n+1)+1-2n-1 = 2$ لكل n من IN .

إذن : $U_{n+1} = U_n + 2$

نقول إن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 2 .

أ ـ تعريف :

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ حسابية إذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث : $U_{n+1} = U_n + r$ لكل nمن I .
العدد r يسمى أساس المتتالية .

ملاحظة :

لكي نبين أن متتالية $(U_n)_{n\in I}$ حسابية يكفي أن نبين أن الفرق $U_{n+1}-U_n$عدد ثابت لكل nمن I . أي غير مرتبط ب n . (فرق حدين متتابعين عدد ثابت) .

تمرين تطبيقي :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 7$ و $U_{n+1} = \dfrac{2U_n - 5}{2}$

بين أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية وحدد أساسها .

ب ـ خاصيات :

1. خاصية مميزة :

نشاط تمهيدي : نعتبر متتالية حسابية $(U_n)_{n\in I}$ أساسها r .

ـ احسب بدلالة U_n المجموع $U_{n-1}+U_{n+1}$. ماذا تستنتج ؟

ـ نعتبر متتالية $(U_n)_{n\in I}$ بحيث : $U_{n-1}+U_{n+1}=2U_n$ بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ حسابية .

خاصية :

تكون $(U_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $U_{n-1}+U_{n+1}=2U_n$ لكل n من I .

نتيجة

تكون a و b و c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان : a + c = 2b .

تمرين تطبيقي:

نعتبر $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r بحيث : $U_1+U_3=16$ و $U_1\times U_2=28$.

احسب : U_0 و r .

تمرين 5 :

نعتبر المتتالية الحسابية (a_n) بحيث : $\begin{cases} a_4+a_6=6 \\ a_8+a_{10}+a_{12}+a_{14}=228 \end{cases}$.

احسب الحد الأول a_0 والأساس r لهذه المتتالية .

2. صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

نشاط تمهيدي :

نعتبر متتالية حسابية $(U_n)_{n\geq 0}$ أساسها r وحدها الأول U_0 . احسب U_n بدلالة U_0 و r و n لكل n من IN .

خاصية :

إذا كانت $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_0 فإن حدها العام : $U_n=U_0+nr$

ملاحظات :

1. إذا كانت $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_1 فإن حدها العام : $U_n=U_1+(n-1)r$

2. إذا كانت $(U_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_{n_0} فإن حدها العام : $U_n=U_{n_0}+(n-n_0)r$.

تمارين تطبيقية :

1) احسب الحد العام للمتتالية الحسابية المعرفة في التمرين السابق .

2) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب : $U_0=7$ و $U_{n+1}=U_n-\frac{5}{2}$. احسب U_{1000} .

3) نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب : $V_5=-1$ و $V_n=V_{n-1}+1$. احسب V_{2005} .

3. مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

نشاط تمهيدي :

نعتبر متتالية حسابية $(U_n)_{n\geq 0}$ أساسها r وحدها الأول U_0 . ونعتبر المجموع : $S_n=U_0+U_1+.....+U_{n-1}$.

S_n يسمى مجموع n حد أول من المتتالية الحسابية $(U_n)_{n\geq 0}$.

احسب S_n بدلالة U_0 و U_{n-1} و n .

لدينا : $S_n=U_0+U_1+.....+U_{n-1}$.

و : $S_n=U_{n-1}+U_{n-2}+.....+U_0$.

إذن : $2S_n=(U_0+U_{n-1})+(U_1+U_{n-2})+...+(U_p+U_{n-(p+1)})+...+(U_{n-1}+U_0)$

ولدينا : $U_p+U_{n-p-1}=U_0+pr+U_0+(n-p-1)r$.

$=U_0+pr+U_0+(n-1)r-pr=U_0+U_{n-1}$

إذن : لكل p ≥ 0 لدينا : $U_p+U_{n-p-1}=U_0+U_{n-1}$.

إذن : $2S_n = n(U_0 + U_{n-1})$. وبالتالي فإن : $S_n = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$

خاصية :

إذا كانت $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_0 و $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$.
فإن : $S_n = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$
بتعبير آخر : مجموع n حد أول من متتالية حسابية $S_n = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$

ملاحظة :

$$S_n = \frac{(\text{الحد الأول + الحد الأخير}) \times \text{عدد الحدود}}{2}$$

* إذا كان U_1 هو الحد الأول من متتالية حسابية فإن : $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$.

* عدد حدود المجموع : $U_p + U_{p+1} + ... + U_n$ هو : $n - p + 1$.

تمارين تطبيقية :

1) احسب المجموع : $1 + 2 + 3 + ... + n$.
2) احسب المجموع : $1 + 3 + 5 + 7 + ...+ (2n + 1)$.
3) $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $U_0 = 3$ احسب المجموع : $U_5 + U_6 + ... + U_{30}$

تمرين 6 :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = -1$ و $U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n}$ لكل n من IN .

1) أ ــ بين أن $U_n \prec 2$ لكل n من IN .
ب ــ بين أن $(U_n)_{n\geq0}$ تزايدية .

2) نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي : $V_n = \frac{1}{2 - U_n}$ لكل n من IN .
أ ــ بين أن $(V_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول
ب ــ احسب V_n ثم U_n بدلالة n .
ج ــ احسب المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ بدلالة n .

2) المتتاليات الهندسية :

نشاط تمهيدي :

استثمر صيدلي في مشروع إنشاء صيدلية مبلغا قدره 100 000 درهم ، ولاحظ أن ربحه الصافي في الشهر الأول هو 5 000 درهم ، وأن ربحه في كل شهر يزيد بنسبة 5 % عن ربحه في الشهر الذي يسبقه .
ليكن u_1 الربح الصافي للصيدلي في الشهر الأول ، و u_n ربحه الصافي في الشهر n .

1) احسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 .
2) تحقق من أن : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3}$.
3) حدد علاقة بين u_{n+1} و u_n .
4) بين بالترجع أن : $u_{n+1} = 1.05u_n$: $\forall n \in IN^*$

نقول في هذه الحالة إن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية أساسها 1.05 وحدها الأول u_1 .

أ ــ تعريف :

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ هندسية إذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث : $U_{n+1} = qU_n$ لكل n من I .
العدد q يسمى أساس المتتالية .

أمثلة : المتتاليات $(U_n)_{n\geq0}$ و $(V_n)_{n\geq0}$ و $(W_n)_{n\geq0}$ المعرفة على التوالي بما يلي : $U_n = 2^n$ و $V_n = \frac{1}{3^n}$ و

$W_n=(-1)^n$ هي متتاليات هندسية . (تحقق من ذلك ، وحدد أساس كل منها) .

ب ـ خاصيات :

1. خاصية مميزة :

نشاط تمهيدي :

نعتبر متتالية هندسية $(U_n)_{n\in I}$ أساسها q .

ـ احسب بدلالة U_n الجداء $U_{n-1}\times U_{n+1}$. ماذا تستنتج ؟

ـ نعتبر متتالية $(U_n)_{n\in I}$ بحيث : $U_{n-1}\times U_{n+1}=(U_n)^2$ بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ هندسية .

خاصية :

تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ هندسية إذا وفقط إذا كان : $U_{n-1}\times U_{n+1}=(U_n)^2$ لكل n من I .

نتيجة :

تكون a و b و c حدود متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان : $a\times c=b^2$.

تمرين تطبيقي :

لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 بحيث : $U_1\succ 0$ و $U_0\times U_2=\frac{25}{4}$ و

$U_0+U_1=\frac{13}{2}$. احسب : U_1 و U_0 و q

تمرين 7 :

a وb و c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية بحيث : a + b + c =30 و (a – 5) و(b -3) و c هي ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية .

احسب : a و b و c .

2. الحد العام لمتتالية هندسية :

نشاط تمهيدي :

لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 .

احسب U_n بدلالة U_0 و q وn لكل nمن IN .

الجواب :

لدينا : $U_1=qU_0$ و $U_2=qU_1$ و ...... و $U_n=qU_{n-1}$

نضرب هذه المتساويات طرفا طرفا (هناك n متساوية) فنجد : $U_1\times U_2\times......\times U_n=q^nU_0\times U_1\times.....\times U_{n-1}$

بما أن $U_0q\neq 0$ فإن : $U_k\neq 0$ لكل k من IN (لاحظ ذلك في المتساويات) .

إذن : $U_n=U_0q^n$.

خاصية :

إذا كانت $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 فإن : $U_n=U_0q^n$.

تطبيقات :

1) في التمرين التطبيقي السابق : $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{8}{3}$ وحدها الأول $U_0=4$

احسب U_n بدلالة n .

الجواب : $U_n=U_0q^n=4\times\left(\frac{8}{3}\right)^n$ لكل n من IN .

2) في النشاط التمهيدي السابق u_n يمثل الربح الصافي للصيدلي في الشهر n .

احسب u_n بدلالة n واستنتج قيمة الربح الصافي للصيدلي في الشهر العاشر .

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :

نشاط تمهيدي :

نعتبر متتالية هندسية $(U_n)_{n\geq 0}$ أساسها q وحدها الأول U_0 . ونعتبر المجموع :
$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$. S_n هو مجموع n حد أول من المتتالية الهندسية $(U_n)_{n\geq 0}$.

لدينا : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$.
$S_n = U_0 + U_0 q + U_0 q^2 + ... + U_0 q^{n-1}$ نضرب طرفي هذه المتساوية في q ، نحصل على :
$qS_n = U_0 q + U_0 q^2 + U_0 q^3 + ... + U_0 q^n$.
نحسب الفرق $S_n - qS_n$ نحصل على : $S_n - qS_n = U_0 - U_0 q^n$
إذن : $(1-q)S_n = U_0(1-q^n)$.
إذا كان $q \neq 1$ فإن : $S_n = U_0 \dfrac{1-q^n}{1-q}$. إذا كان $q = 1$ فإن : $S_n = nU_0$.

خاصية :

لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 .
ونعتبر المجموع : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$.

- إذا كان $q \neq 1$ فإن : $S_n = U_0 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.
- إذا كان $q = 1$ فإن : $S_n = nU_0$.

ملاحظة :

- إذا كان U_1 الحد الأول لمتتالية هندسية $(U_n)_{n\geq 1}$ أساسها q ($q \neq 1$) فإن : S_n مجموع n حد أول منها يصبح : $S_n = U_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

$$S_n = \frac{\text{الحد الأول} \times (1 - q^{(\text{عدد الحدود})})}{1 - q}$$

تطبيقات :

1) في التمرين التطبيقي السابق : $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{8}{3}$ وحدها الأول $U_0 = 4$.
نعتبر المجموع : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$.
احسب S_n بدلالة n .

2) في النشاط التمهيدي السابق u_n يمثل الربح الصافي للصيدلي في الشهر n .
نعتبر المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$
S_n هو مجموع الأرباح الصافية للصيدلي إلى حدود الشهر n .
احسب S_n بدلالة n واستنتج مجموع الأرباح الصافية للصيدلي سنة بعد إنشاء الصيدلية .

3) احسب المجموعين : $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{1000}$ و $3^{10} + 3^{11} + 3^{12} + ... + 3^{1000}$.

تمرين 8:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{5} U_n$ لكل n من IN .
ونعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in IN}$ المعرفة ب : $V_n = U_n - \dfrac{5}{3}$.

أ ــ بين أن : $(V_n)_{n\in IN}$ متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول .
ب ــ عبر عن V_n بدلالة n .
ج ــ احسب المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n$ بدلالة n .